20/11/2015.

Κατασκευή κανονικών επιφανειών.

Έστω $f: W\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ W ανοικτό του $\mathbb{R}^3$ και f λεία $f(x,y,z)$.
Το p_0 λέγεται κρίσιμο σημείο της f αν-ν $f_x(p_0)=f_y(p_0)=f_z(p_0)=0$

Θεώρημα: Έστω $f: W\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ λεία και W ανοικτό του $\mathbb{R}^3$ και $a\in f(W)$.
$f(a)=\{(x,y,z)\in W \mid f(x,y,z)=a\}$
Αν το $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της f τότε f είναι κανονική επιφάνεια.

Παραδείγματα:

(1) $S_R^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=R^2\}$
Θεωρώ την $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$.
Προφανώς $f^{-1}(0)=S_R^2$
Βλέπω τα κρίσιμα σημεία της f
$f_x(x,y,z)=2x$, $f_y(x,y,z)=2y$ $f_z(x,y,z)=2z$

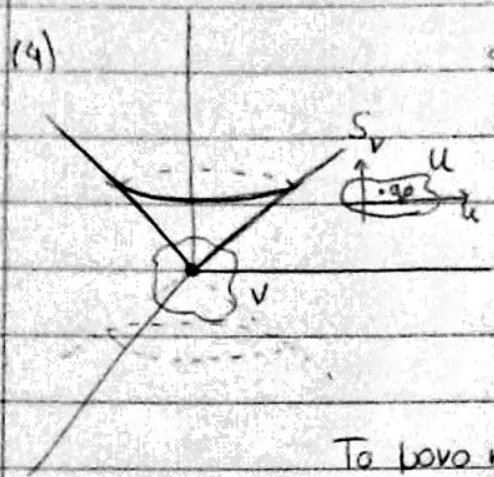
(2) Επίπεδα: (Π) $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ $(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$.
Θεωρώ τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=Ax+By+\Gamma z+\Delta$.
$f^{-1}(0)=\Pi$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $\emptyset$.
$f_x=A$, $f_y=B$, $f_z=\Gamma\neq$. Άρα η f^{-1} κανονική επιφάνεια.

(3) $S: x^2+y^2=R^2$ θεωρώ την $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=x^2+y^2-R^2$. $f^{-1}(0)=S$
Τα κρίσιμα σημεία της f είναι $f_x(x,y,z)=2x$ $f_y(x,y,z)=2y$ $f_z(x,y,z)=0$.

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=0 \\ f_y(x,y,z)=0 \\ f_z(x,y,\cancel{z})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

Το σύνολο των κρίσιμων σημείων είναι το $\{(0,0,z)/z\in\mathbb{R}\}$ = άξονας Oz
κανένα κρίσιμο δεν ανήκει $f^{-1}(0)$. Άρα S κανονική επιφάνεια.
Σύστημα συντεταγμ. $x=\cos u$, $y=\sin u$, $z=v$ $U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$.
$X: U\subset\mathbb{R}^2\to$ Vns $X(u,v)=(\cos u, \sin u)$

(4)



$S: x^2+y^2=z^2$ θεωρώ την $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με

$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

$S=f^{-1}(0)$

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f

$f_x=f_y=f_z=0 \iff \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ -2z=0 \end{cases}$

Το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0)\in f^{-1}(0)$???

Ισχυρισμός: Ο κώνος δεν είναι κανονική επιφάνεια.

Απόδειξη:

Έστω ότι είναι κανονική επιφάνεια. Τότε για το $O=(0,0,0)$ υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X: U\subset\mathbb{R}^2\to S\cap V$ όπου U είναι ανοικτό του $\mathbb{R}^2$ και V ανοικτό του $\mathbb{R}^3$ με $O\in V$

$X: U\setminus\{q_0\}\to S\cap V\setminus\{0\}$

(Εκτροπιακή συνεκτικότητα) → Είναι ιδιότητα τοπολογική που δεν ικανοποιείται

Άρα δεν είναι ισομορφισμός, άρα δεν είναι κανονική επιφάνεια.

(5) $S: x^2+y^2-z^2=a^2 \quad a>0$

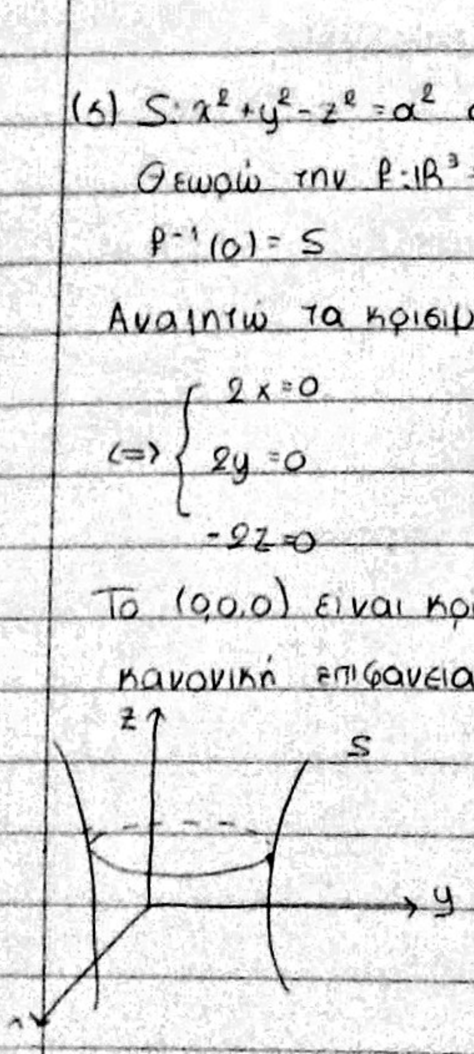
Θεωρώ την $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-a^2$

$f^{-1}(0)=S$

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία $f_x=f_y=f_z=0$

$\iff \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ -2z=0 \end{cases}$

Το $(0,0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Επειδή $(0,0,0)\notin f^{-1}(0) \Rightarrow S=f^{-1}(0)$ κανονική επιφάνεια



Προσοχή: Το Θεώρημα κατασκευάζει κανονικές επιφάνειες αλλά όχι απαραίτητα συνεκτικές επιφάνειες

Π.χ. $x^2 - y^2 - z^2 = a^2$

δίχωνο υπερβολοειδές.

Απόδειξη Θεωρήματος:

$p_0 \in f^{-1}(a) \Rightarrow (f_x(p_0), f_y(p_0), f_z(p_0)) \neq (0,0,0)$

Υπόθεση: $f_z(p_0) \neq 0$. Θεωρώ την $F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$

$F: W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο p_0 είναι:

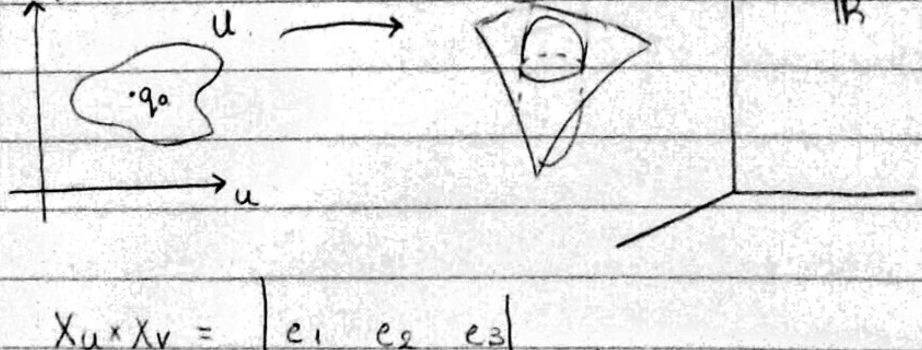
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p_0) & f_y(p_0) & f_z(p_0) \end{pmatrix} = f_z(p_0) \neq 0.$$

$$F(x,y,z) = (u,v,t) \Longleftrightarrow (x,y,f(x,y,z)) = (u,v,t) \Longleftrightarrow (x,y,z) = (u,v,\underbrace{g(u,v,t)}_{\text{λεία συνάρτηση}})$$

Στο $V \cap f^{-1}(a)$: $(x,y,z) = (u,v,\underbrace{g(u,v,t)}_{h(u,v)})$

Είναι γράφημα, άρα είναι κανονική επιφάνεια.

→ Έστω S κανονική επιφάνεια.



$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Έστω ότι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. $F: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$F = \pi \circ X$, $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, η $F|_{U_0}$ διαφορομορφισμός όπου $U_0 \subseteq U$ περιοχή του q_0

$$F(u,v)=(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x(u,v)=x \\ y(u,v)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

Για $(u,v)\in U_0$, $X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=(x,y,\underbrace{z(u(x,y),v(x,y))}_{g(x,y)})$

Αποδείξαμε την εξής:

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια

(i) Για κάθε σημείο $p_0\in S$ υπάρχει ανοικτό W της S με $p_0\in S$ και το W είναι γράφημα ως προς ένα από τα επίπεδα συντεταγμένων.

(ii) Για $q_0\in U$ υπάρχει περιοχή του $U_0\subset U$ ώστε η $\pi\circ X|_{U_0}$ είναι διαφορομορφισμός.

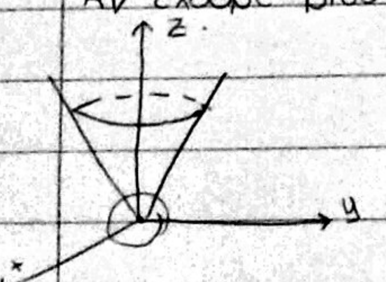
(iii) Αν X πληροί (i) & (ii) και η S είναι κανονική επιφάνεια $\Rightarrow X^{-1}$ συνεχής

Απόδειξη του (iii):

$$X^{-1}=\underbrace{(\pi\circ X)^{-1}}_{\text{συνεχής}}\circ\underbrace{\pi}_{\text{συνεχής}}$$

Άρα και η X^{-1} είναι συνεχής.

Αν έχουμε μισό κώνο:



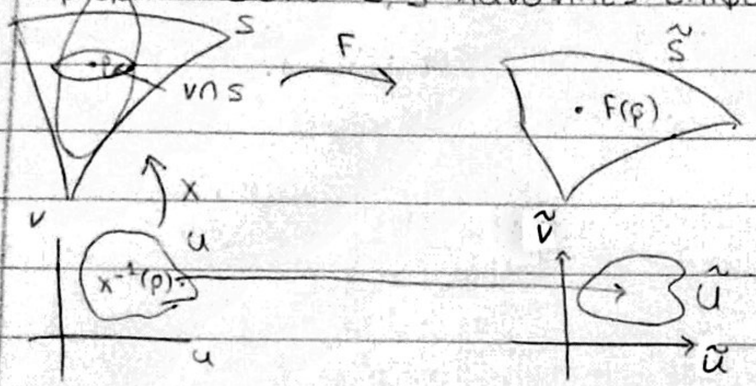
$S: \sqrt{x^2+y^2}=z$

Είναι γράφημα σε μια περιοχή κοντά στο O, όμως η $\sqrt{x^2+y^2}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$. Άρα δεν είναι λεία, άρα δεν είναι κανονική επιφάνεια.

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφανειών:

Ορισμός: Η $f: S \to \mathbb{R}$ καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν-ν για σύστημα συντεταγμένων $X: U \to V \cap S$ με $p \in V$ η $f \circ X : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$. Η f καλείται διαφορίσιμη αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο της S.

Ορισμός: Έστω $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $F: S \to \tilde{S}$



Ορισμός: Η F καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν για συστήματα συντ/νων $X: U \to V \cap S$, $\tilde{X}: \tilde{U} \to \tilde{V} \cap \tilde{S}$ με $p \in V$ και $F(X(U)) \subset \tilde{X}(\tilde{U})$ η $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(p)$.
Η F είναι διαφορίσιμη αν-ν είναι διαφ. σε κάθε σημείο $p \in S$.

Εφαπτόμενα διανύσματα - εφαπτόμενο επίπεδο κανονικής επιφάνειας.

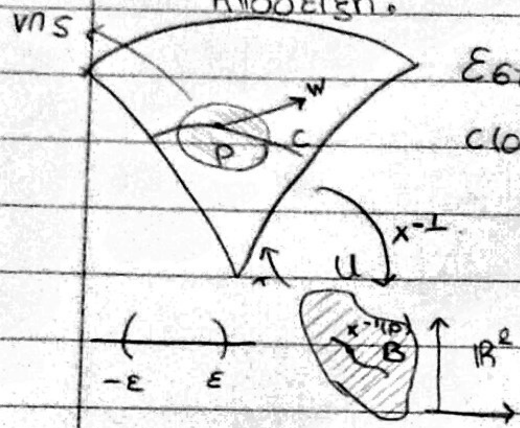
Ορισμός: Το διάνυσμα w καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο p αν-ν υπάρχει λεία καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ ώστε $c(0) = p$ και $c'(0) = w$.
Συμβολίζω με T_pS το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της S στο p.
$T_pS \subset T_p\mathbb{R}^3$.

→ Έστω $X: U \to V\cap S$ σύστημα συντ/νων με $p\in V$. Τότε $\{X_u(X^{-1}(p)), X_v(X^{-1}(p))\}$ ανήκουν στο T_pS.

↳ βάση του T_pS

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια, $p\in S$ και $X: U\to V\cap S$ σύστημα συν/νων της με $p\in V$. Τότε ισχύει: $T_pS = dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$, $q = X^{-1}(p)$.

Απόδειξη:



Έστω $w\in T_pS$. Υπάρχει λεία καμπύλη $c: (-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ με $c(0)=p$ και $c'(0)=w$

Υποθέτω ότι $c(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V\cap S$

$B: (-\varepsilon,\varepsilon)\to U$, $B = X^{-1}\circ c$, $B(0) = X^{-1}(c(0)) = X^{-1}(p)$.

$c = X\circ B \Rightarrow w = c'(0) = (\overset{\text{λεία}}{X\circ B})'(0) = dX_q(B'(0))$

Άρα $T_pS \subseteq dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$ (1)

Αντίστροφα έστω $w = dX_q(w_0)$ $w_0\in T_q\mathbb{R}^2$.

Θεωρώ καμπύλη $B: (-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ με $B(0)=q$ και $B'(0)=w_0$.

$dX_q(w_0) = (X\circ B)'(0)$, $X\circ B: (-\varepsilon,\varepsilon)\to V\cap S$

$X\circ B(0) = X(q) = p$.

Άρα $w\in T_pS$, δηλ. $dX_q(T_q\mathbb{R}^2)\subseteq T_pS$ (2).

Από (1) & (2) ισχύει η ισότητα.

→ $B(t) = (u(t), v(t))$

$c(t) = X(B(t)) \Leftrightarrow \boxed{c(t) = X(u(t), v(t)).}$

$w = c'(0) = u'(0)\,X_u(\underbrace{u_0(0), v(0)}_{=q}) + v'(0)\,X_v(u_0(0), v(0))$

$\boxed{w = u'(0)\,X_u(X^{-1}(p)) + v'(0)\,X_v(X^{-1}(p))}$

Διαφορικό διαφορίσιμων απεικονίσεων
μεταξύ επιφανειών

Ορισμος: Εστω $S, \tilde{S}$ κανονικες επιφανειες και $F : S \to \tilde{S}$ διαφορίσιμη απεικονιση. Ονομαζουμε διαφορικό της F στο p την απεικόνιση $dF_p : T_p S \to T_{F(p)} \tilde{S}$.

$w \in T_p S$. Τοτε υπαρχει καμπύλη $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$. $c(0) = p$, $c'(0) = w$.
Θεωρω την καμπυλη $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \tilde{S}$ με $\tilde{c} = F \circ c$, $\tilde{c}(0) = F(c(0)) = F(p)$
οποτε $dF_p(w) = \tilde{c}'(0)$.